



Hyperlogarithms, Bernoulli polynomials, and related multiple zeta values

著者	川崎 菜穂
号	84
学位授与機関	Tohoku University
学位授与番号	理博第3170号
URL	http://hdl.handle.net/10097/00125413

論文内容要旨

(NO. 1)

氏 名	川 崎 菜 穂	提出年	平成 30 年
学位論文の 題 目	Hyperlogarithms, Bernoulli polynomials, and related multiple zeta values (Hyperlogarithms, Bernoulli 多項式, および関連する多重ゼータ値)		

論文目次

1	Introduction
2	Integral-Series identities for hyperlogarithm
2.1	Hyperlogarithms
2.2	Notation and algebraic setup
2.3	Yamamoto's integral representations
2.4	Main theorems
2.4.1	Integral-Series identity for hyperlogarithms
2.4.2	Regularization theorem
2.4.3	Proof of Theorem 2.12
3	Combinatorial proofs for special values of Arakawa-Kaneko multiple zeta functions
4	The algorithm for Bernoulli polynomials
4.1	The algorithm for Bernoulli numbers
4.2	Algorithm for multi-poly-Bernoulli polynomials
4.2.1	Algorithm for multi-poly-Bernoulli polynomials
4.2.2	Proof of Theorem 4.2
4.2.3	Proof of Proposition 4.3
4.3	Concluding remark
4.3.1	The other algorithm for Bernoulli polynomials
4.3.2	Algorithm for interpolation of multi-poly-Bernoulli numbers
4.3.3	Algorithm for generalized multi-poly-Bernoulli polynomials
5	Cyclic sum of finite multiple zeta values
5.1	Cyclic sum formula
5.2	Proof of Theorem 5.2
5.3	$\hat{\mathcal{A}}$ -finite multiple zeta values
6	On duality formula and derivation relation for multiple zeta values
6.1	Duality formula and derivation relation
6.2	Proof of Theorem 6.1

論文要旨

博士論文において中心的に取り扱われる対象は、多重ゼータ(スター)値と hyperlogarithms である。多重ゼータ(スター)値とは、Euler と Goldbach の研究に起源をもつリーマンゼータ値のある種の多重化であり、多重インデックスに対して割り当てられる実数である。また、多重ゼータ値と多重ゼータスター値は互いに他の有理数係数の線形結合で書き表すことができる。 Hyperlogarithms とはこの多重ゼータ値を特殊値にもつ、一変数複素関数である。

博士論文では、多重ゼータ値と hyperlogarithms についての研究結果を五部構成で論じる。Chapter 2 では、 hyperlogarithms の積分級数等式を与え、この等式が満たす性質について述べる。Chapter 3 では、Arakawa-Kaneko の多重ゼータ関数と Kaneko-Tsumura の多重ゼータ関数それぞれの特殊値に対する、二つの定理に現象説明的な再証明を与える。Chapter 4 では、一般 multi-poly-Bernoulli 多項式の生成アルゴリズムを、Bernoulli 数における Akiyama-Tanigawa アルゴリズムの改良と拡張により与える。Chapter 5 では、有限多重ゼータ(スター)値の巡回和公式を与える。Chapter 6 では、多重ゼータ値の双対公式導出問題に関する結果を述べる。以下でより詳しく述べる。

Chapter 2 の背景と概略は次の通りである。Zagier は 1994 年の論文の中で、多重ゼータ値が生成する有理数体上のベクトル空間の次元を数値実験により予想した。そして、Goncharov, Terasoma, Deligne 達により、その次元の上限を Zagier の予想次元まで下げられることがモチーフ論を用いて証明された。そのことにより、事前に予測されていたことではあるが、多重ゼータ値の間には非常に多くの関係式が存在することが確定した。彼らの結果は多重ゼータ値の間の具体的な関係式を議論したものではないため、多重ゼータ値の関係式の全体像を把握することが重要課題の一つとなっている。そして、全ての関係式を与えようと予想される関係式族の一つに積分級数等式と呼ばれるものがある。この等式は Kaneko-Yamamoto によって証明され、多重ゼータ値の間に成り立つすべての関係式をもたらし得るであろうと予想された。多重ゼータ値の積分級数等式には二色半順序集合に付随する積分が用いられている。この積分で表すことを Yamamoto 積分表示という。一方、多重ゼータ値の関係式への新たなアプローチとして、 hyperlogarithms の関係式を研究する方法がある。筆者はまず、Yamamoto 積分表示の一般化を与え、 hyperlogarithms の積分級数等式を証明した。この等式には多重ゼータ値の circled-harmonic 積の一般化と Hirose-Sato による代数的定式化を用いている。今回得られた等式を特殊化することにより、多重ゼータ値の積分級数等式や、新たに、ある種の Euler sum の積分級数等式が得られる。次に、 hyperlogarithms の正規化基本定理を与えた。これは、複シャッフル関係式下で積分級数等式と同値であることから証明される。この正規化基本定理は Hirose-Sato による二つの積を用いており、今回新たに得られたものである。正規化基本定理に用いる写像の一意性の証明には、これら二つの積を適切に改良したものを用いる。

Chapter 3 の背景と概略は次の通りである。Arakawa-Kaneko は multiple polylogarithm 関数を用いて、Riemann ゼータ関数の一般化を与えた。この Arakawa-Kaneko の多重ゼータ関数には、`双子の兄弟' と呼ばれる Kaneko-Tsumura の多重ゼータ関数が存在する。これらの多重ゼータ関数の特殊値に関する明示公式と双対公式の二定理を以前のものより見通し良く再証明することができた。再証明に

(NO. 3)

関する明示公式と双対公式の二定理を以前のものより見通し良く再証明することができた。再証明には、二つの多重ゼータ関数の特殊値の Yamamoto 積分表示を用いる。この結果は、大野泰生氏(東北大学)との共同研究である。

Chapter 4 の背景と概略は次の通りである。poly-Bernoulli 数には 2 つのタイプがあり、それぞれ Akiyama-Tanigawa のアルゴリズム, Chen のアルゴリズムを用いて計算することができる。一方, multi-poly-Bernoulli 多項式の生成アルゴリズムはこれまで知られていなかった。multi-poly-Bernoulli 多項式を特殊化することにより, Bernoulli 多項式や 2 つのタイプの multi-poly-Bernoulli 数などが得られる。この 2 つのタイプの multi-poly-Bernoulli 数は Arakawa-Kaneko の多重ゼータ関数や Kaneko-Tsumura の多重ゼータ関数, それぞれの負整数点での特殊値に現れる。筆者は multi-poly-Bernoulli 多項式について, 自然な生成アルゴリズムを得ることができた。そして, この多項式に Dirichlet 指標をつけた一般 multi-poly-Bernoulli 多項式を定義し, この生成アルゴリズムも得た。この結果は, 大野泰生氏(東北大学)との共同研究である。

Chapter 5 の背景と概略は次の通りである。多重ゼータ値の有限類似である有限多重ゼータ値には, 多重ゼータ値と同様の次元予想が存在する。この次元予想により, 有限多重ゼータ値の間には, 多重ゼータ値より多くの関係式の存在が期待されている。しかし, 多重ゼータ値の間のすでに示されている関係式の有限類似はいまだ確認されていないものが多い。多重ゼータ(スター)値の基本的かつ重要な関係式の一つに和公式がある。巡回和公式は和公式の精密化と呼ばれている関係式である。筆者は有限多重ゼータ(スター)値の巡回和公式を与えた。この結果は, 小山宏次郎氏との共同研究である。また, 有限多重ゼータ(スター)値の一般化である $\hat{\mathcal{A}}$ -有限多重ゼータ(スター)値の巡回和公式も与えた。

Chapter 6 では主に修士課程で取り組んだ課題と成果を編集再構成して述べる。多重ゼータ値の全ての関係式を与えうると予想される関係式族の一つに一般複シャッフル関係式と呼ばれるものがある。このことを裏付ける研究として, 「双対公式導出問題」に取り組んだ。双対公式導出問題とは, 多重ゼータ値の間関係式族のひとつである双対公式を一般複シャッフル関係式から導くことが出来るか, という重大な未解決問題であり, 先行研究はほとんどなく, 梶川氏の結果として, ある条件を満たす多重ゼータ値の和の双対公式は一般複シャッフル関係式に含まれるということが知られるのみである。筆者の一方の研究結果は(和ではなく)個々の二重ゼータ値に対する双対公式導出問題の肯定的解決を意味しており, その後の Z. Li の論文に引用されるなど評価されている。この結果は, 田中立志氏(京都産業大学)との共同研究である。

論文審査の結果の要旨

川崎菜穂氏提出の本博士論文では、四つの視点から、多重ゼータ関数の特殊値のもつ数論的性質を考察し関係式等の具体的な研究成果を与えている。扱われている多重ゼータ関数は、リーマンゼータ関数の多変数化または多変数 polylogarithms を用いた一般化である。特に多重ゼータ関数の特殊値が生成する \mathbb{Q} 代数の構造解明は喫緊の課題のひとつであり、これに向けて特殊値間に成立する関係式の系統的理解がひとつの重要課題になっている。

第2章では、通常の高重ゼータ値に関する積分級数等式の、高重ゼータ値を特殊値にもつ1変数関数である hyperlogarithms への一般化を与えている。積分級数等式は高重ゼータ値間の有理線形関係式の全てを生成すると予測されている強力な等式であり、hyperlogarithms への一般化は重要であった。川崎氏は近年手がけられていた代数的な土台作りの補充と必要な整備を行い、hyperlogarithms の積分級数等式を導出している。併せて hyperlogarithms に対する正規化基本定理も導出し、積分級数等式との同値性にも言及している。新たな変則的調和積の定式化や Yamamoto 積分表示の 3-poset への拡張など、いくつもの工夫を経て得た非常に優れた成果と言える。

第3章以降はそれぞれ1名の研究者との共同研究成果である。第3章では、Arakawa-Kaneko 型高重ゼータ関数の正整数点の値を高重ゼータ値で書く一般的な公式を、Yamamoto 積分表示を用いて簡潔に再証明している。この公式は Kaneko-Tsumura により解析的に導出されていた。博士論文では Yamamoto 積分表示を用いて組合せ論的証明を与えており、簡素で理解しやすいほか、現れる二項係数の積の由来が詳らかとなる点が優れている。第4章では、Arakawa-Kaneko 型高重ゼータ関数の負整数点の値に現れる多重ベルヌーイ数に対して、既存の算出方法の一般化を与えている。従来の算出方法の振れを解消し一般化したことにより、アルゴリズムの背後にある数列の特性が見通しよく把握できている点と、多項式補間との方向性の一致が見られる点が興味深い。第5章では、有限高重ゼータ（スター）値に対する巡回和公式を得ている。古典的ケースとは異なる項が現れるなど、専門的に意義深い新情報をもたらす成果となっている点が高く評価できる。

これらの成果はすべて、ゼータ関数の特殊値研究に重要な知見を与えるものである。

以上のことから、本博士論文は川崎氏が自立して研究活動を行うのに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している。したがって、川崎菜穂氏提出の博士論文を、博士（理学）の学位論文として合格と認める。